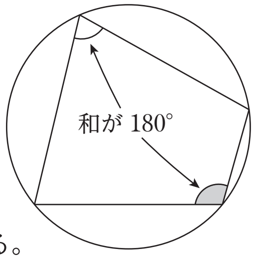
PART2　円に内接する四角形の面積

2　AB＝BC＝3，CD＝5，DA＝8 である四角形 ABCD が円に内接している。

(1)　対角線 AC の長さを求めよ。

(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

Point Pickup



円に内接する四角形の対角の和は 180° であることを利用して解く。

対角線によって分けられた 2 つの三角形に余弦定理を適用するため，

対角線の長さをそれぞれ式で表し，

$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$

を用いて，対角線の長さと対角の余弦の値に関する連立方程式をつくる。

これを解くことで，対角線の長さおよび対角の余弦の値を求めることができる。

四角形の面積は，対角線によって分けられた 2 つの三角形の面積の和として求める。

その際に $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$ を用いるとよい。

第10講　PART2 確認問題

1　AB＝2，BC＝3，CD＝6，DA＝5である四角形 ABCD が円に内接している。このとき, 対角線 AC の長さ, および四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

$\mathrm{AC}=\sqrt{\boxed{アイ}}$

$S=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$

PART2　円に内接する四角形の面積

2　AB＝BC＝3，CD＝5，DA＝8 である四角形 ABCD が円に内接している。

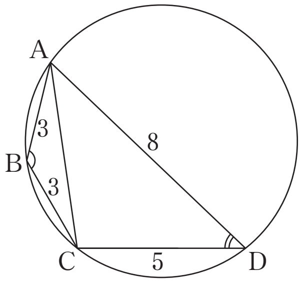
(1)　対角線 AC の長さを求めよ。

(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$D=180^\circ-B$$

△ABC で余弦定理より



$$AC^2=3^2+3^2-2\cdot3\cdot3\cos B$$

$$=18-18\cos B \quad \cdots\cdots ①$$

△ADC で余弦定理より

$$AC^2=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cos(180^\circ-B)$$

$$=89+80\cos B \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$18-18\cos B=89+80\cos B$

$$\cos B=-\frac{71}{98}$$

このとき，①より

$$AC^2=18-18\cdot\left(-\frac{71}{98}\right)=18\left(1+\frac{71}{98}\right)=18\cdot\frac{169}{98}=\frac{9\cdot169}{49}$$

よって　$AC=\frac{3\cdot13}{7}=\frac{39}{7}$

(2)　$\sin B>0$ より

$$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{71}{98}\right)^2}=\sqrt{\frac{98^2-71^2}{98^2}}=\frac{\sqrt{(98+71)(98-71)}}{98}=\frac{\sqrt{169\cdot27}}{98}=\frac{39\sqrt{3}}{98}$$

よって，四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\triangle ABC+\triangle ADC$$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\sin B+\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin(180^\circ-B)$$

$$=\frac{9}{2}\sin B+\frac{40}{2}\sin B=\frac{49}{2}\sin B=\frac{49}{2}\cdot\frac{39\sqrt{3}}{98}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$$

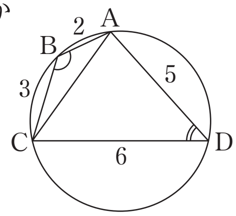
第10講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：21，ウ：6，エ：5

[解説]

四角形 ABCD は円に内接するから



$$D=180^\circ-B$$ [A]

△ABC で余弦定理より

$$AC^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos B$$
$$=13-12\cos B \quad \cdots\cdots①$$ [B]

△ADC で余弦定理より

$$AC^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cos(180^\circ-B)$$
$$=61+60\cos B \quad \cdots\cdots②$$ [B] [A]

①，②より　$13-12\cos B=61+60\cos B$

ゆえに　$\cos B=-\dfrac{48}{72}=-\dfrac{2}{3}$

このとき，①より

$$AC^2=13-12\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=21$$

$AC>0$ より　$AC=\boldsymbol{\sqrt{21}}$

また，$0^\circ<B<180^\circ$ より，$\sin B>0$ であるから

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

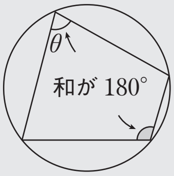
よって，四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\triangle ABC+\triangle ADC$$ [C]

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin B+\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\sin(180^\circ-B)$$ [A]

$$=3\sin B+15\sin B=18\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\boldsymbol{6\sqrt{5}}$$

[A]
円に内接する四角形の対角の和は 180°



また
$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$
$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

[B]　2 つに分けた三角形それぞれで，余弦定理により対角線の長さを式で表す。
対角線の長さと余弦の値に関する連立方程式を解くことで対角線の長さ（および余弦の値）を得る。

[C]　円に内接する四角形の面積は，対角線によって分けられた 2 つの三角形の面積の和として求める。